SESSION DE 1999

Filière MP

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II - ANALYSE

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices est autorisée

On rappelle que $\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Partie 1

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définies sur] 0 , +∞ [par:

$$u_0(x) = x$$

$$u_{n+1}(x) = \frac{2\sqrt{u_n(x)}}{1+u_n(x)}.$$

Question 1

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction constante égale à 1.

b) Soit $U_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ vérifie la relation de récurrence suivante:

$$\forall x > 0\ ,\ U_{n+1}(x) = \frac{1+U_n(x)}{2\sqrt{U_n(x)}}.$$

En déduire que : $\forall x > 0\ ,\ \forall n \geq 1\ ,\ |U_{n+1}(x) - 1| \leq \frac{1}{2}|U_n(x) - 1|$.

c) Prouver que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout compact de] 0 , +∞[. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?

Question 2

On définit la suite de fonctions $(v_n)_{n\geq 0}$ par:

$$v_0 = 1;\ \forall n \geq 0,\ v_{n+1} = v_n \frac{1+u_n}{2}.$$

a) Montrer que pour tout $x > 0$, les suites $\left(v_n(x)\right)_{n\geq 1}$ et $\left(v_n(x)u_n(x)\right)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

On note $f(x)$ la limite de la suite $\left(v_n(x)\right)_{n\geq 1}$.

b) Montrer que les suites de fonctions $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(u_n\ v_n)_{n\geq 1}$ convergent uniformément vers f sur tout compact de] 0 , +∞ [.

c) En déduire que la fonction f est continue sur]0,+∞[.

Partie 2

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$.

Question 1

Montrer que l'application $x \to F(x)$ est une application de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Question 2

Trouver une relation simple entre $F(x)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right)$

Question 3

a) Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

b) En remarquant que $F(x) > \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$, déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 0$.

Question 4

a) Montrer que $F(x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$.

b) Montrer que $F(x)$ est équivalent au voisinage de 0 à $2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}}$

c) En déduire des équivalents simples de F au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Partie 3

Question 1

Soit x un réel strictement positif.

a) Soit φ l'application définie sur $]0, +\infty[$ par: $\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{x}{t}\right)$.

Montrer que φ est un C^1 difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, et que:

$$\forall t > 0,\ \varphi'(t) = \frac{1}{t}\sqrt{x+\varphi^2(t)}\,.$$

b) A l'aide du changement de variable $u = \varphi(t)$, montrer que $F(x) = \frac{2}{1+x} F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$

Question 2

En déduire que $f(x)F(x)$ ne dépend pas de x. Quelle est cette valeur?

Partie 4

Dans cette partie on suppose que x appartient à]0,1[.

Question 1

Montrer que pour tout x, $(1+x)\, f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = f\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

Question 2

En déduire que, si on pose $w_n(x) = \sqrt{1-u_n^2(x)}$,

$$(1+u_n(x))\, f(w_{n+1}(x)) = f(w_n(x)).$$

Question 3

Prouver que $\lim_{n\to+\infty} 2^n f\left(w_n(x)\right) = \frac{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{f(x)}$

Question 4

Soit $k_n(x) = -2^{-n} \ln(w_n(x))$. Montrer en utilisant les résultats établis à la partie 2, qu. 4 et partie 3, qu. 2 que

$$k_n(x) \sim \frac{\pi}{2} \frac{f(x)}{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)} \text{ lorsque } n\to+\infty.$$

Question 5

a) Montrer que pour tout n, et pour tout x, $k'_{n+1}(x) = \frac{k'_n(x)}{u_n(x)}$.

b) En déduire que pour tout n, $\frac{k'_{n+1}}{(u_{n+1}v_{n+1})^2} = \frac{k'_n}{(u_n v_n)^2}$

c) Déterminer $k'_n(x)$ à l'aide de x, $u_n(x)$ et de $v_n(x)$.

Quelle est alors la limite de la suite $(k'_n(x))_{n\geq 0}$?

Question 6

Prouver que : $\frac{\pi}{2} \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}\right) = \frac{(f(x))^2}{x(1-x^2)}$.

Question 7

Montrer que $\pi = 2\sqrt{2} \frac{f^3\left(1/\sqrt{2}\right)}{f'\left(1/\sqrt{2}\right)}$. Que devient cette égalité lorsqu'on remplace f par son expression à l'aide de la fonction F?